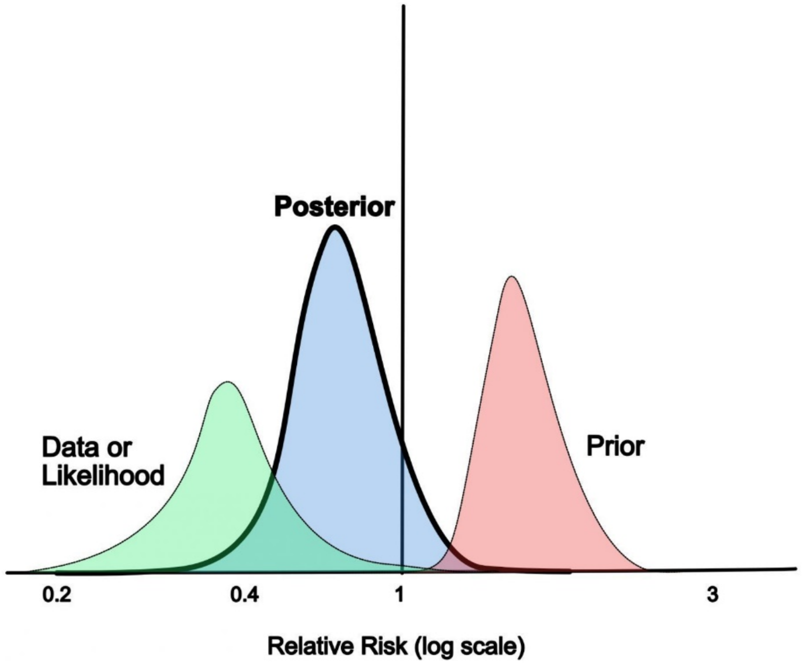
Rochebrune 2024

30 ANS D'APPRENTISSAGE ET ENCORE BEAUCOUP DE QUESTIONS

Un ami c'est quelqu'un que tu connais bien et que tu aimes quand même

L. DUCKSTEIN (1932-2015)
J. BERNIER (1932 -)
E. PARENT (1957 -)

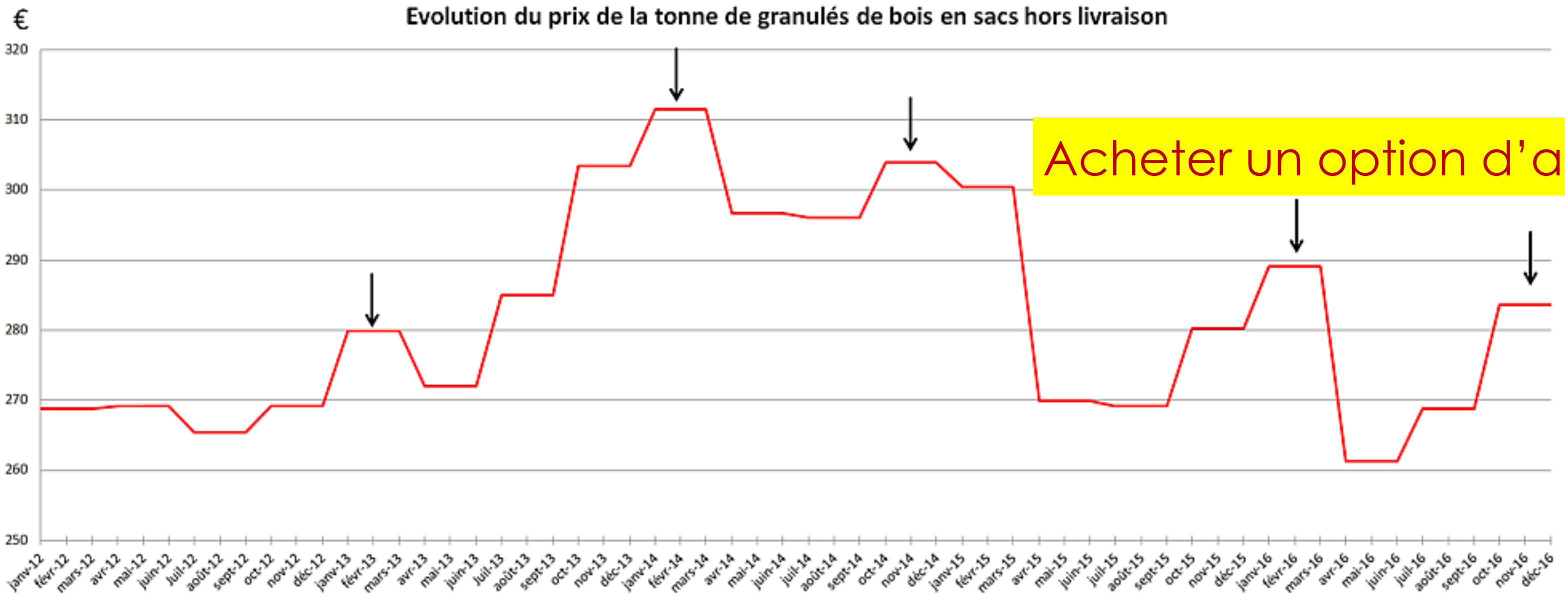
It’s a long way to go



J'ai de la chance ou j'aide la chance?

LA PRÉVISION FINANCIÈRE

Le prévision financière



Acheter un option d'achat ?

Les protagonistes

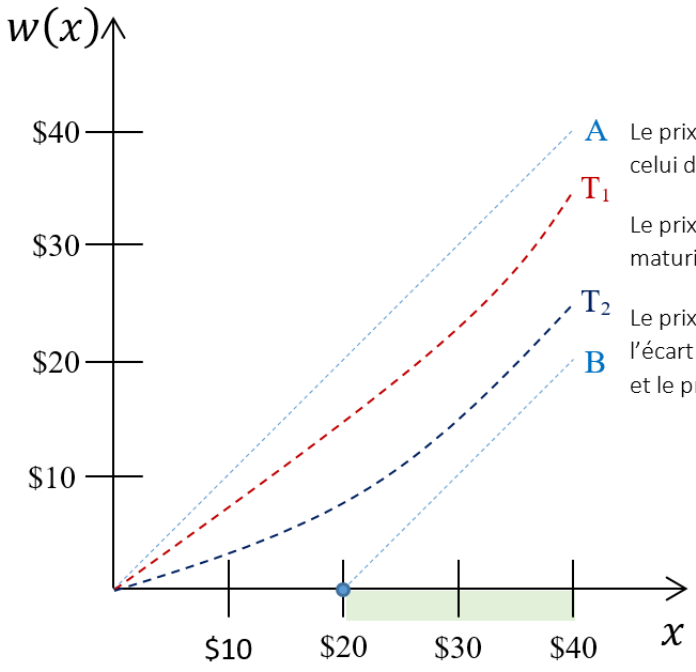
Les modèles financiers sont inspirés par le mouvement brownien

- 1828, Robert **Brown** (1773-1858)
- 1901, Louis **Bachelier** (1870-1946)
- 1905, Albert **Einstein** (1879-1955)
- Sydney **Chapman** (1888-1970) et Andreï **Kolmogorov** (1903-1987)
- Norbert **Wiener** (1894-1964) et Pierre-Paul **Lévy** (1886-1971)
- Fisher **Black** (1938-1995), Myron **Scholes** (1941-) et Robert **Merton** (1944-)
  - *The Pricing of Options and Corporate Liabilities (MIT, 1973)*
  - *Prix Nobel d'économie en 1997 pour Scholes et Merton.*

Un peu de vocabulaire

- Une **option** est une sécurité donnant le droit d'acheter ou de vendre un actif **sous-jacent**, sous certaines conditions, dans un délai déterminé.
- Le prix fixé lors de la signature du contrat est le **prix de l'exercice**.
- Le période fixée lors de la signature du contrat est la **maturité** de l'option.
- **Option européenne d'achat (call)**
  - Le particulier et l'organisme financier signent un contrat qui donne le droit au particulier, mais pas l'obligation, d'acheter une action à l'organisme financier à une date convenue et à un prix convenu contre le versement d'une **prime** définitivement acquise par l'organisme financier.
  - **Le modèle de Black-Scholes** (Merton) donne le **prix de l'option**.

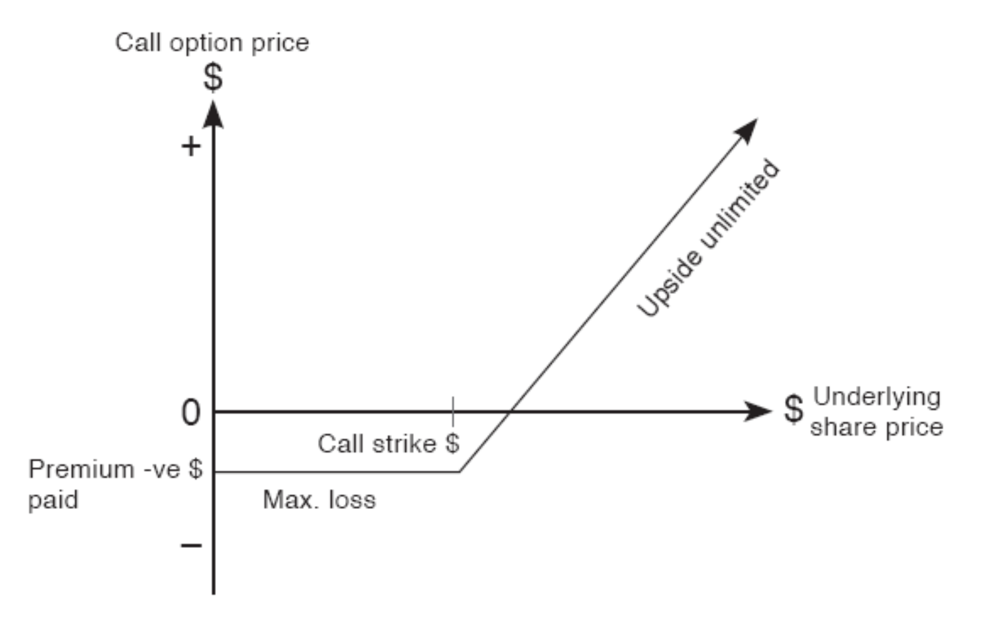
Enfonçons le clou



Le prix de l'option est moindre que celui de son sous-jacent x

Le prix de l'option croît avec la maturité ($T_1 > T_2$)

Le prix de l'option est supérieur à l'écart entre le prix du sous-jacent et le prix de l'exercice $(x - c)$

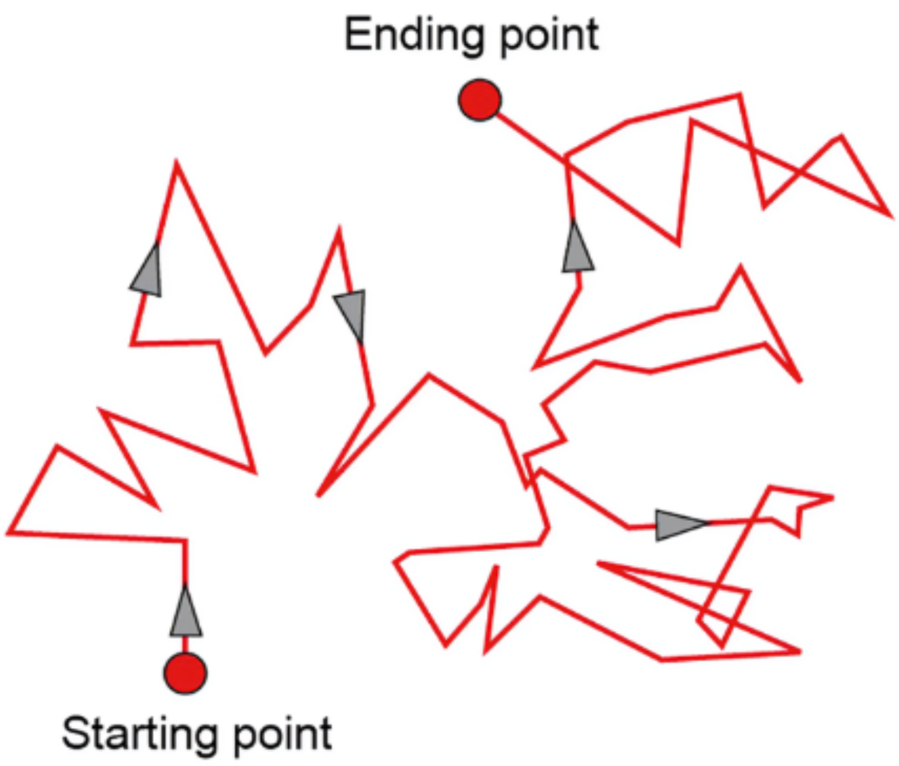


Source: OptionsWise

Le processus de diffusion de Wiener-Lévy

SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

Le mouvement brownien



- Une particule solide microscopique (10 µm) est soumise à une force fluctuante due aux nombreuses collisions avec les molécules du liquide.
- Le nombre de collisions par unité de temps fluctue notablement.
- La faible masse rend la trajectoire observable.

Processus de diffusion de Wiener-Lévy

- Le processus stochastique de Wiener-Lévy modélise le mouvement brownien.
- C'est un processus à espace d'état et de temps continus défini par l'équation de Chapman-Kolmogorov.
- La variance du processus croît systématiquement avec le temps.
- Définition du processus Wiener-Lévy : Chapman-Kolmogorov

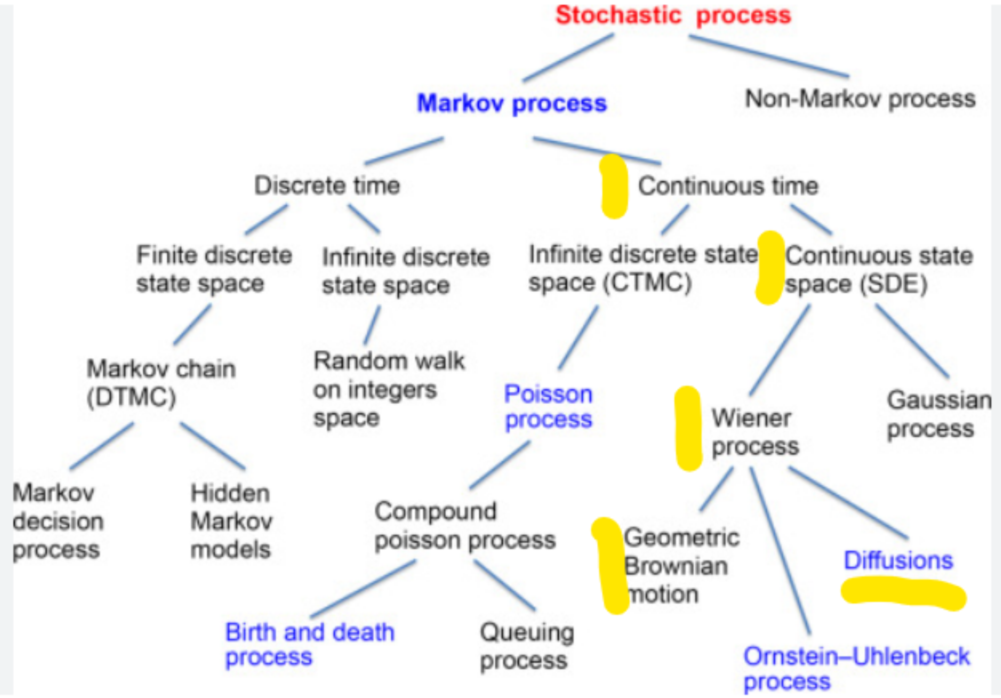
$$\frac{\partial f(y,t)}{\partial t} = -\delta \frac{\partial f(y,t)}{\partial y} + \frac{1}{2}\nu \frac{\partial^2 f(y,t)}{\partial y^2}$$

Processus de diffusion de Wiener-Lévy

- Les écarts $Y_t - Y_s$ constituent un processus stationnaire indépendant

$$Y_t - Y_s \sim \mathcal{N}\left(\delta(t-s), \sigma^2(t-s)\right)$$

À l'origine $Y_0 = 0$



Mathématique financière

FONDÉES SUR LA MATHÉMATIQUE DU MOUVEMENT BROWNIEN

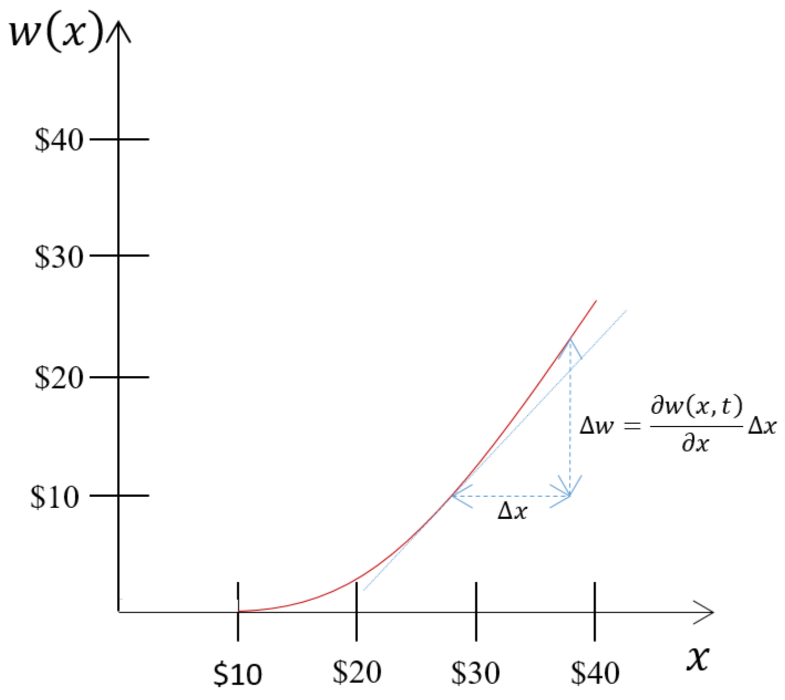
Le modèle de Black-Scholes (1973)

- La valeur d'une option européenne d'achat est une fonction $w(x,t)$ de la valeur $x(t)$ de l'action sous-jacente.
- Leur raisonnement conduit à une équation différentielle du second ordre similaire à celle de Chapman-Kolmogorov
  - Sous les conditions limites, l'unique solution donne l'équation de couverture
- Notations des auteurs (simplifier leur script)

$$w_1 = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad w_2 = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \quad w_{11} = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}$$

Black-Scholes : fondements

- Inverse du nombre d'option
  - $w_1 \equiv \dfrac{\partial w(x,t)}{\partial x} \geq 1$
  - $w_1^{-1} \times \Delta\, w = \Delta\, x$
- Variation du capital propre
  - $x - w_1^{-1} w$
- Rendement du capital propre
  - $\Delta\, x - w_1^{-1}\, \Delta\, w$
- Le lemme d'Ito (1915-2008) pour $\Delta\, w$



Le lemme d'Ito

- Ito exprime la différentielle d'une fonction d'un processus stochastique au cours du temps (permet de manipuler le mouvement brownien)
  - $$\Delta w = w(x+\Delta x, t+\Delta t) - w(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}v^2x^2\Delta t$$

$$\Delta w = w_1 \Delta x + w_2 \Delta t + \frac{1}{2}w_{11}v^2x^2\Delta t$$

- Le rendement du capital propre devient :

$$\Delta x - w_1^{-1}\Delta w = \Delta x - w_1^{-1}\left\{w_1\Delta x + w_2\Delta t + \tfrac{1}{2}w_{11}v^2x^2\Delta t\right\}$$

$$= -\left(\tfrac{1}{2}w_{11}v^2x^2 + w_2\right)\frac{\Delta t}{w_1}$$

Placement sans risque

- Le capital propre est $x - w_1^{-1}\mathrm{w}$
- Son rendement risqué est $\Delta x - w_1^{-1}\Delta w = -\left(\frac{1}{2}w_{11}v^2x^2 + w_2\right)\frac{\Delta t}{w_1}$
- Son placement sans risque au taux r pendant Δt produit $\left(x - w_1^{-1}\mathrm{w}\right)r\,\Delta t$
- Si la position est couverte : $-\left(\frac{1}{2}w_{11}v^2x^2 + w_2\right)\frac{\Delta t}{w_1} = \left(x - w_1^{-1}\mathrm{w}\right)r\,\Delta t$
- Nettoyage :

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \underbrace{rw(x,t)}_{prix} - \underbrace{rx\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}}_{vitesse} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}v^2x^2}_{accélération}$$

Comparaison

Chapman-Kolmogorov

$f \equiv f(y,t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\delta \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Black-Scholes (Merton)

$w \equiv w(x,t)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = rw - rx\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2} v^2 x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$c.\,l.:\ w(x,T) = 0 \Leftrightarrow c \geq x(T)$$

Black-Scholes-Merton (1973)

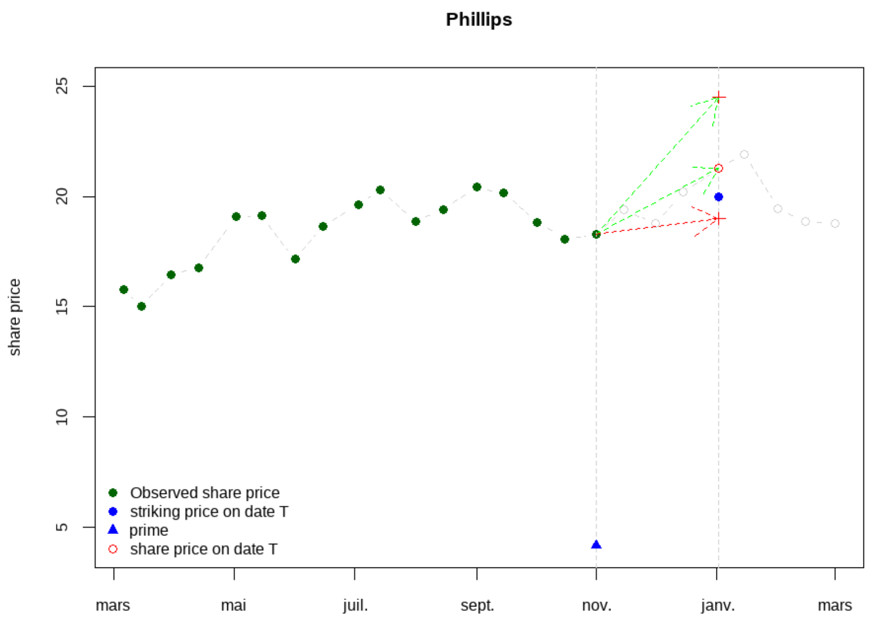
- La condition limite (call) est que la prix du sous-jacent à la maturité excède le prix de l'exercice, i.e. $x(T) > c$.
- Dans ce cas l'équation différentielle aux dérivées partielles du 2nd ordre admet une seule solution:

$$w(x,t) = x\phi(d_1) - ce^{-r(T-t)}\phi(d_2)$$

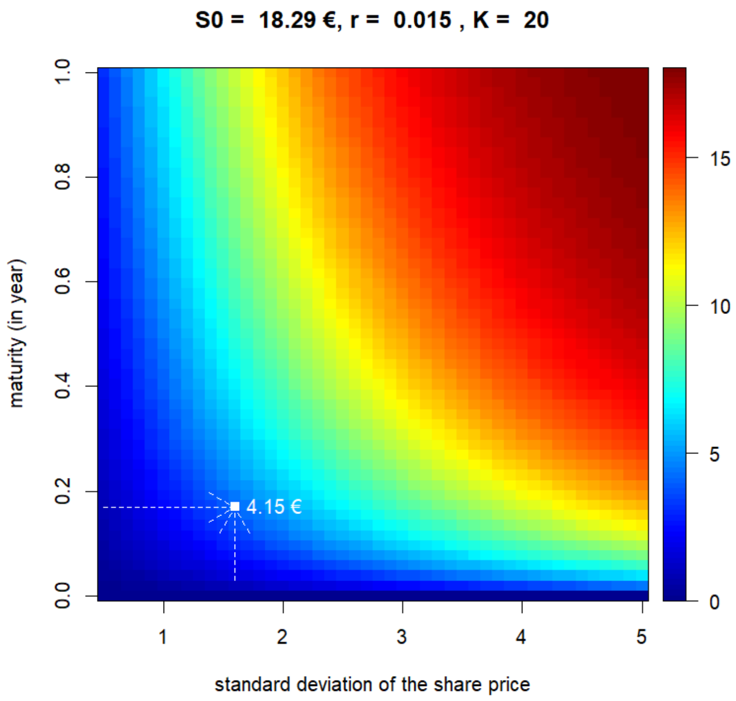
$$d_1 = \frac{1}{v\sqrt{T-t}}\left\{\ln\frac{x}{c} + \left(r + \frac{1}{2}v^2\right)(T-t)\right\}$$

$$d_2 = d_1 - v\sqrt{T-t}$$

Exemple


Phillips
share price
25
20
15
10
5
mars
mai
juil.
sept.
nov.
janv.
mars
Observed share price
striking price on date T
prime
share price on date T

Vue d'en haut



L'action sous-jacente vaut 18.29 € le jour de la signature du contrat.

Le prix de l'exercice est 20 €.

Le taux d'intérêt sans risque est 1.5%.

La valeur du call augmente avec le risque, i.e. avec la volatilité de l'action et la maturité du call.

Critiques

- Hypothèses classiques : *will assume "ideal conditions" in the market for the stock and for the option:*
  - Le taux sans risque r est connu et constant dans le temps
  - Le prix de l'exercice c et la maturité de l'option T sont fixés
  - Le call est européen.
  - Le prix de l'action est un mouvement brownien dont la variance est proportionnelle au carré de sa valeur
- Ce modèle ignore l'instinct grégaire des opérateurs
- Ce modèle ignore les valeurs extrêmes (loi normale standard)
- La volatilité mesurée par l'écart-type d'un historique est très incertaine

La formule du roi Midas (Ian Stewart)

Les opérateurs ont pris des paris sur des paris ! Le marché des dérivés a explosé et conduit à la crise financière de 2008-2009.

On comprend le mauvais usage du modèle parce qu'on comprend le modèle !

Intelligence artificielle ?

Conclusion

- J'ai commencé en étudiant les brouillards puis j'ai fait du flou avec Lucien Duckstein, ce qui était attendu vu mes antécédents.
- Jacques Bernier et Eric Parent m'ont « Bayes-iarisé » avec talent, patience et parfois avec pédagogie.
- Le prévision m'intéresse et le cas des dérivés financiers est riche d'enseignements. On pourrait remplacer certains paramètres de l'équation de Black-Scholes-Merton par des distributions de probabilité ?
- L'IA à le vent en poupe et je ne suis pas contre par principe, mais je crains un renoncement de la compréhension au profit du résultat !
- Un « scientifique » est responsable de ce qu'il recommande de faire !

Merci